第26卷 第6期 工 程 数 学 学 报 Vol. 26 No. 6
2009年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2009

文章编号:1005-3085(2009)06-1083-07

结构动力模型修正中的一类对称矩阵反问题*

刘 皞[1], 袁永新[2]

(1- 南京航空航天大学理学院，南京 210016; 2- 江苏科技大学数学系，镇江 212003)

摘 要: 在实际工程中，由有限元模型得到的计算值与通过试验获得的测量值之间往往存在偏差，为了能够精确预测结构的动力响应，依据测量信息修正现有的动力模型是非常必要的。本文研究结构动力模型修正中的一类对称矩阵反问题(IP-MUP)：给定矩阵 $\Lambda = \mathrm{diag}\{\omega_1^2,\omega_2^2,\cdots,\omega_p^2\} \in \mathbf{R}^{p\times p}$，$X = [x_1,x_2,\cdots,x_p] \in \mathbf{R}^{n\times p}$，以及矩阵 M_0，$K_0 \in \mathbf{SR}^{r\times r}$。求矩阵 M，$K \in \mathbf{SR}^{n\times n}$，使得 $MX\Lambda = KX$，$X^TMX = I_p$，且满足 $M([1,r]) = M_0$，$K([1,r]) = K_0$，其中 $M([1,r])$, $K([1,r])$ 分别表示矩阵 M, K 的前 r 阶主子矩阵。运用代数特征值反问题的理论和方法，文中给出了问题IP-MUP有解的充分必要条件；并在有解的情况下，给出了通解的显式表示。

关键词: 有限元模型；模型修正；子矩阵；反问题

分类号: **AMS**(2000) 65F18 **中图分类号**: O327; TB123 **文献标识码**: A

1 引言

对一线性无阻尼 n 自由度系统，其动力特性可由如下常系数微分方程来描述

$$M_a\ddot{x}(t) + K_a x(t) = 0, \tag{1}$$

其中 $x(t)$, $\ddot{x}(t)$ 分别表示 n 维位移向量与加速度向量。M_a，K_a 分别是 $n\times n$ 阶分析质量矩阵与刚度矩阵。

在实际工程中，利用有限元模型(FEM)式(1)得到的理论分析结果与实际结构的实测结果往往存在偏差，这种偏差主要是由有限元模型误差(包括边界条件和连接条件的简化，几何模型和本构关系的不准确等)以及实验测量误差引起的，并且很难通过改进计算方法而消除[1]。近二十年来，随着建模技术和动力测试技术的日益成熟，结构动力模型修正受到了科技工作者和工程师们的广泛关注[2,3]。修正的结构动力模型不仅能够更加精确地预测结构的动力响应，而且还可以通过结合实测结果对结构进行损伤检测和剩余寿命评估[4-7]。

结构动力模型修正即为利用结构现场实测的振动信息修正结构有限元模型，使得修正后结构分析的模态参数与试验值趋于一致。假定由模态参数识别技术从振动测试数据中得到了前 p 阶精确的模态参数，记为

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2, \cdots, \omega_p^2\} \in \mathbf{R}^{p\times p}, \quad X = [x_1, x_2, \cdots, x_p] \in \mathbf{R}^{n\times p},$$

其中 ω_i, x_i 分别是第 i 阶测量频率与测量振型，且 $\mathrm{rank}(X) = p$。现在要用模态参数识别结果修正初始有限元模型，使得修正后的质量矩阵 $M \in \mathbf{SR}^{n\times n}$ 和刚度矩阵 $K \in \mathbf{SR}^{n\times n}$ 满足下列模

收稿日期: 2007-11-06. **作者简介**: 刘皞(1979年4月生)，男，博士，讲师. 研究方向：数值代数与动力学反问题.
***基金项目**: 江苏省自然科学基金(BK2009364).

态正交条件

$$X^TMX = I_p, \quad X^TKX = \Lambda, \tag{2}$$

以及特征方程

$$MX\Lambda = KX. \tag{3}$$

鉴于模型误差主要来自结构的几何形状、边界条件和受力状态等情况复杂部位，因而结构动力学模型的物理参数矩阵中常常仅部分元素存在明显误差，若按常规对整个模型进行修正，由于无误差的元素也参与运算将会导致振型误差的引入并放大，从而大大降低修正精度。为了减少这种影响，并降低模型修正的计算工作量，只需对存在误差的元素进行修正。借助于误差定位技术[8-11]，可确定有限元质量矩阵与刚度矩阵中存在误差的元素。通过重新排列有限元模型的结点次序，可使质量矩阵与刚度矩阵中无误差的元素集中在矩阵左上角的一个区域内，然后利用模态正交关系与特征方程修正误差项。注意到式(2)的第二式可由式(2)的第一式与式(3)推出，由此，对质量矩阵与刚度矩阵的同时修正即为如下的矩阵反问题。

问题IP-MUP 给定测量的频率组成的矩阵 $\Lambda = \mathrm{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2, \cdots, \omega_p^2\} \in \mathbf{R}^{p\times p}$，相应的实测振型矩阵 $X = [x_1, x_2, \cdots, x_p] \in \mathbf{R}^{n\times p}$，以及矩阵 M_0，$K_0 \in \mathbf{SR}^{r\times r}$。求矩阵 M，$K \in \mathbf{SR}^{n\times n}$，使得

$$MX\Lambda = KX, \quad X^TMX = I_p, \quad \text{s.t.} \quad M\big([1,r]\big) = M_0, \quad K\big([1,r]\big) = K_0,$$

其中 $M([1,r])$，$K([1,r])$ 分别表示矩阵 M, K 的前 r 阶主子矩阵。

文[12,13]考虑了一类子矩阵约束下的矩阵反问题，可其均不能保证修正后的矩阵满足特征方程。文[14]考虑了一类振型矩阵与质量矩阵的修正问题，但其并没有考虑刚度矩阵的修正。本文运用代数特征值反问题的理论和方法，给出了问题IP-MUP有解的充分必要条件，并在有解时，给出了通解的显式表示。

本文用 $\mathbf{R}^{n\times m}$ 表示所有 $n\times m$ 阶实矩阵的集合，$\mathbf{SR}^{n\times n}$ 表示所有 $n\times n$ 阶实对称矩阵的集合，$\mathbf{OR}^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 阶正交矩阵的集合，I_m 表示 m 阶单位矩阵，A^+ 表示矩阵 A 的Moore-Penrose广义逆。

2 问题IP-MUP的解

作矩阵 X 的QR-分解，得

$$X = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

其中 Q 是 $n\times n$ 阶正交矩阵，$R \in \mathbf{R}^{p\times p}$ 是非奇异上三角矩阵。由 $X^TMX = I_p$，得

$$\begin{bmatrix} R^T, & 0 \end{bmatrix} Q^TMQ \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = I_p, \tag{5}$$

记

$$Q^TMQ = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} p \\ n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} \end{array}, \tag{6}$$

则式 (5) 等价于

$$\begin{bmatrix} R^T, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = I_p, \tag{7}$$

比较上式的左右两边，得

$$M_1 = R^{-T} R^{-1}. \tag{8}$$

再由 $KX = MX\Lambda$，得

$$Q^T K Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = Q^T M Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \Lambda, \tag{9}$$

记

$$Q^T K Q = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2^T & K_3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} p \\ n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} \end{array}, \tag{10}$$

则

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2^T & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R\Lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

比较上式左右两边，得

$$K_1 = M_1 R\Lambda R^{-1} = R^{-T}\Lambda R^{-1}, \quad K_2^T = M_2^T D, \tag{12}$$

其中 $D = R\Lambda R^{-1}$。从而可解得

$$M = Q \begin{bmatrix} R^{-T} R^{-1} & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix} Q^T, \tag{13}$$

$$K = Q \begin{bmatrix} R^{-T}\Lambda R^{-1} & D^T M_2 \\ M_2^T D & K_3 \end{bmatrix} Q^T, \tag{14}$$

其中 $M_2 \in \mathbf{R}^{p\times(n-p)}$ 为任意矩阵，M_3, $K_3 \in \mathbf{R}^{(n-p)\times(n-p)}$ 为任意对称矩阵。

由 $M([1,r]) = M_0$，$K([1,r]) = K_0$，得

$$\begin{bmatrix} I_r, & 0 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} I_r, & 0 \end{bmatrix}^T = M_0, \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} I_r, & 0 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} I_r, & 0 \end{bmatrix}^T = K_0. \tag{16}$$

记

$$\begin{bmatrix} I_r, & 0 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} Q_1, & Q_2 \end{bmatrix},$$

其中 $Q_1 \in \mathbf{R}^{r\times p}$, $Q_2 \in \mathbf{R}^{r\times(n-p)}$。将式 (13), (14) 代入式 (15), (16) 得

$$\begin{bmatrix} Q_1, & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{-T}R^{-1} & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} = M_0, \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1, & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{-T}\Lambda R^{-1} & D^T M_2 \\ M_2^T D & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} = K_0, \tag{18}$$

即

$$Q_2 M_2^T Q_1^T + Q_1 M_2 Q_2^T + Q_2 M_3 Q_2^T = M_0 - Q_1 R^{-T} R^{-1} Q_1^T \triangleq H, \tag{19}$$

$$Q_2 M_2^T D Q_1^T + Q_1 D^T M_2 Q_2^T + Q_2 K_3 Q_2^T = K_0 - Q_1 R^{-T} \Lambda R^{-1} Q_1^T \triangleq G. \tag{20}$$

作矩阵 Q_2 的奇异值分解

$$Q_2 = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^T, \tag{21}$$

其中 $U = [U_1,\ U_2] \in \mathbf{OR}^{r\times r}$, $P = [P_1,\ P_2] \in \mathbf{OR}^{(n-p)\times(n-p)}$, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_s)$, $s = \mathrm{rank}(Q_2)$, $\sigma_i > 0\ (i = 1, \cdots, s)$，并记

$$P^T M_3 P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} M_{31} & M_{32} \\ M_{32}^T & M_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{c} s \\ n-p-s \end{array} \\ \begin{array}{cc} s & n-p-s \end{array} \end{array}, \tag{22}$$

$$P^T K_3 P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} K_{31} & K_{32} \\ K_{32}^T & K_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{c} s \\ n-p-s \end{array} \\ \begin{array}{cc} s & n-p-s \end{array} \end{array}. \tag{23}$$

将式 (21) 与式 (22) 代入式 (19)，得

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Sigma P_1^T M_2^T Q_1^T U_1 & \Sigma P_1^T M_2^T Q_1^T U_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1^T Q_1 M_2 P_1 \Sigma & 0 \\ U_2^T Q_1 M_2 P_1 \Sigma & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma M_{31} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = &\begin{bmatrix} U_1^T H U_1 & U_1^T H U_2 \\ U_2^T H U_1 & U_2^T H U_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{24}$$

上式等价于

$$M_{31} = \Sigma^{-1}\big(U_1^T H U_1 - \Sigma P_1^T M_2^T Q_1^T U_1 - U_1^T Q_1 M_2 P_1 \Sigma\big)\Sigma^{-1}, \tag{25}$$

$$U_2^T Q_1 M_2 P_1 \Sigma = U_2^T H U_1, \tag{26}$$

$$U_2^T H U_2 = 0. \tag{27}$$

同理，将式 (21) 与式 (23) 代入式 (20)，可解得

$$K_{31} = \Sigma^{-1}(U_1^T G U_1 - \Sigma P_1^T M_2^T D Q_1^T U_1 - U_1^T Q_1 D^T M_2 P_1 \Sigma)\Sigma^{-1}, \tag{28}$$

$$U_2^T Q_1 D^T M_2 P_1 \Sigma = U_2^T G U_1, \tag{29}$$

$$U_2^T G U_2 = 0. \tag{30}$$

式 (26) 与式 (29) 可改写为

$$\begin{bmatrix} U_2^T Q_1 D^T \\ U_2^T Q_1 \end{bmatrix} M_2 P_1 = \begin{bmatrix} U_2^T G U_1 \\ U_2^T H U_1 \end{bmatrix} \Sigma^{-1}, \tag{31}$$

记

$$A = \begin{bmatrix} U_2^T Q_1 D^T \\ U_2^T Q_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} U_2^T G U_1 \\ U_2^T H U_1 \end{bmatrix} \Sigma^{-1}, \tag{32}$$

并设矩阵 A 的奇异值分解为

$$A = T \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T, \tag{33}$$

其中 $T = [T_1,\ T_2] \in \mathbf{OR}^{(2r-2s)\times(2r-2s)}$, $V = [V_1,\ V_2] \in \mathbf{OR}^{p\times p}$, $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_t)$，$t = \mathrm{rank}(A)$, $\delta_i > 0\ (i = 1, \cdots, t)$。则矩阵方程 (31) 有解 M_2 的充分必要条件为[15]

$$AA^+B = B \tag{34}$$

有解时，其解 M_2 可以表示为

$$M_2 = A^+BP_1^T + JP_2^T + V_2 L, \tag{35}$$

其中 $J \in \mathbf{R}^{p\times(n-p-s)}$, $L \in \mathbf{R}^{(p-t)\times(n-p)}$ 是任意矩阵。

综上，已经证明了如下结论。

定理 1 给定测量的频率组成的矩阵 $\Lambda = \mathrm{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2, \cdots, \omega_p^2\} \in \mathbf{R}^{p\times p}$，相应的实测振型矩阵 $X = [x_1, x_2, \cdots, x_p] \in \mathbf{R}^{n\times p}$，以及矩阵 M_0，$K_0 \in \mathbf{SR}^{r\times r}$。则问题 IP-MUP 有解的充分必要条件是

$$U_2^T H U_2 = 0, \quad U_2^T G U_2 = 0, \quad AA^+B = B, \tag{36}$$

其中 G, H, U_2, A, B 分别如式 (19)，式 (20)，式 (21) 和式 (32) 所示。此时

$$M = Q \begin{bmatrix} R^{-T}R^{-1} & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix} Q^T, \tag{37}$$

$$K = Q \begin{bmatrix} R^{-T}\Lambda R^{-1} & D^T M_2 \\ M_2^T D & K_3 \end{bmatrix} Q^T, \tag{38}$$

其中 $D = R\Lambda R^{-1}$, Q 如式 (4) 所示

$$M_3 = P \begin{bmatrix} M_{31} & M_{32} \\ M_{32}^T & M_{33} \end{bmatrix} P^T, \qquad K_3 = P \begin{bmatrix} K_{31} & K_{32} \\ K_{32}^T & K_{33} \end{bmatrix} P^T,$$

$$M_{31} = \Sigma^{-1}\big(U_1^T H U_1 - \Sigma P_1^T M_2^T Q_1^T U_1 - U_1^T Q_1 M_2 P_1 \Sigma\big)\Sigma^{-1},$$

$$K_{31} = \Sigma^{-1}\big(U_1^T G U_1 - \Sigma P_1^T M_2^T D Q_1^T U_1 - U_1^T Q_1 D^T M_2 P_1 \Sigma\big)\Sigma^{-1},$$

P, M_2 分别如式 (21) 与式 (35) 所示，M_{32}，$K_{32} \in \mathbf{R}^{s\times(n-p-s)}$ 为任意矩阵，M_{33}，$K_{33} \in \mathbf{R}^{(n-p-s)\times(n-p-s)}$ 为任意对称矩阵。

3 数值算例

例 描述一个振动系统的质量矩阵中无误差元素组成的矩阵为

$$M_0 = 0.03 \times \begin{bmatrix} 52 & 22 & 18 & -13 \\ 22 & 12 & 13 & -9 \\ 18 & 13 & 104 & 0 \\ -13 & -9 & 0 & 24 \end{bmatrix},$$

刚度矩阵中无误差元素组成的矩阵为

$$K_0 = 600 \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & 3 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

测得系统的前三阶固有频率为 $\omega_1 = 1.8841$, $\omega_2 = 10.0575$, $\omega_3 = 19.8203$，相应的振型向量为

$$\begin{bmatrix} 0.5585 & -0.0841 & 0.3094 & -0.0800 & 0.0996 & -0.0553 & 0.0084 \end{bmatrix}^T,$$

$$\begin{bmatrix} 0.4751 & -0.2353 & -0.1717 & -0.1646 & -0.3562 & 0.0404 & -0.1788 \end{bmatrix}^T,$$

$$\begin{bmatrix} -0.4241 & 0.2838 & 0.2512 & 0.0852 & -0.0508 & -0.2105 & -0.4113 \end{bmatrix}^T.$$

容易验证给定的数据满足定理 1 的条件，据式 (37) 与式 (38) 求得问题 IP-MUP 的一个解 M, K 满足 $\|MX\Lambda - KX\| = 9.9695e-013$。因此，测量模态数据已融于修正模型 $MX\Lambda = KX$。

4 结束语

本文运用代数特征值反问题的理论和方法，研究了结构动力模型修正中的一类对称矩阵反问题。数值算例表明，本文提出的方法不仅可使修正模型具有对称的结构，而且由于避免了无误差的元素参与运算，从而极大地提高了结构动力模型的修正精度。

参考文献：

[1] Bathe K J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis[M]. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffes, 1982: 1-5

[2] Friswell M I, Mottershead J E. Finite Element Model Updating in Structural Dynamics[M]. Boston: Klumer Academic Publishers, 1995: 1-6

[3] Mottershead J E, Friswell M I. Model updating in structural dynamics: a surrey[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 167(3): 347-375

[4] Zhang Q W, *et al.* Finite element model updating for the kap shui mun cable-stayed bridge[J]. Journal of Bridge Engineering, ASCE, 2000, 6(4): 285-293

[5] Oreta A W C, Tanabe T A. Element identification of member properties of framed structures[J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1994, 120(4): 1961-1976

[6] Zimmerman D C, Widengren M. Correcting finite element models using a symmetric eigenstructure assignment technique[J]. AIAA J, 1990, 28(9): 1670-1676

[7] Doebling S W, *et al.* A summary review of vibration-based damage identification methods[J]. The Shock and Vibration Digest, 1998, 30: 91-105

[8] 张德文，魏阜旋. 模型修正与破损诊断[M]. 北京：科学出版社，1999

[9] O'Callahan J C, Chou C M. Localization of model errors in optimized mass and stiffness matrices using modal test data[J]. International J Analytical and Experimental Analysis, 1989, 4: 8-14

[10] Luber W, Lotze A. Application of sensitivity methods for error localization in finite element systems[C]// Proc of the 8th International Model Analysis Conference, 1990: 598-604

[11] Link M. Identification and correction of errors in analytical models using test data–theoretical and practical bounds[C]// Proc of the 8th International Modal Analysis Conference, 1990: 570-578

[12] Yuan Y X, Dai H. Inverse problems for symmetric matrices with a submatrix constraint[J]. Applied Numer Math, 2007, 57: 646-656

[13] Liu H, Dai H. Inverse problems for nonsymmetric matrices with submatrix constraint[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 189: 1320-1330

[14] 袁永新，戴华. 用振动测量数据最优修正振型矩阵与质量矩阵[J]. 工程数学学报，2007, 24(4): 631-638

[15] Ben-Israel A, Greville T N E. Generalized Inverse: Theory and Applications[M]. New York: Wiley, 1974

An Inverse Problem for Symmetric Matrices in Structural Dynamic Model Updating

LIU Hao[1], YUAN Yong-xin[2]

(1- College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016;
2- Department of Mathematics, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003)

Abstract: There is a gap between predictions resulting from finite-element model and experimental results of an actual structure. Updating the existing dynamic models based on the model test data is very important in order to predict actual behaviors of the structure. In this paper, an inverse problem for symmetric matrices in structural dynamic model updating (IP-MUP) is considered: given $\Lambda = \mathrm{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2, \cdots, \omega_p^2\} \in \mathbf{R}^{p\times p}$, $X = [x_1, x_2, \cdots, x_p] \in \mathbf{R}^{n\times p}$, and matrices $K_0 \in \mathbf{SR}^{r\times r}$, $M_0 \in \mathbf{SR}^{r\times r}$, find real $n \times n$ symmetric matrices K, M such that $X^TMX = I_p$, $KX = MX\Lambda$, with $K([1,r]) = K_0$, $M([1,r]) = M_0$, where $M([1,r])$ and $K([1,r])$ are $r \times r$ leading principal submatrices of M and K, respectively. By means of the theory and method of the algebraic inverse eigenvalue problems, a sufficient and necessary condition under which IP-MUP is solvable is obtained, and an explicit expression for the general solution to the problem is also provided when the solvability condition is satisfied.

Keywords: finite-element model; model updating; submatrix; inverse problem